## Die Menge R der reellen Zahlen

Als Menge „aller Zahlen“ haben wir bisher die Menge Q der rationalen Zahlen verstanden. Die Menge Q ist definiert als "Menge aller Zahlen, die sich als Bruch schreiben lassen".

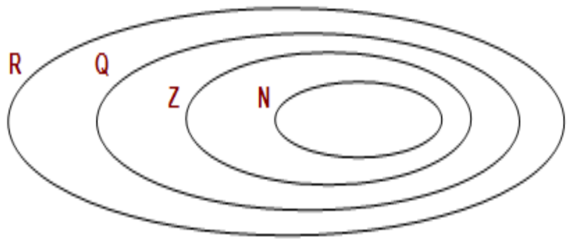
Beim Berechnen von Wurzeln sind aber zwei Fälle zu unterscheiden:

- Der Radikand ist eine so genannte Quadratzahl (z.B. $\sqrt{4}$ ; $\sqrt{6{,}25}$ ; $\sqrt{\frac{9}{25}}$ ; ...). Da eine Quadratzahl durch Quadrieren einer rationalen Zahl entsteht, liefert deren Wurzel wieder die ursprüngliche rationale Zahl.
- Der Radikand ist keine Quadratzahl (z.B. $\sqrt{2}$ ): In diesem Fall lässt sich beweisen, dass die Wurzel nicht als Bruch geschrieben werden kann und somit keine rationale Zahl ist (siehe unten)!

In der Menge Q sind also nicht alle Zahlen enthalten; daher muss diese Zahlenmenge erweitert werden:

**Definition:** Zahlen, die nicht als Bruch geschrieben werden können, heißen **irrationale Zahlen**. Sie bilden zusammen mit den rationalen Zahlen Q die neue **Menge R der reellen Zahlen.**

Für die Zahlenmengen gilt: **N** $\subset$ **Z** $\subset$ **Q** und **Q** $\cup$ **{irrationale Zahlen} = R**




## So lässt sich beweisen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist:

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, muss sie sich als Bruch schreiben lassen und dieser Bruch muss soweit wie möglich gekürzt werden können. Dann gilt: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ und zwar so, dass a und b "teilerfremd" sind. Nun werden beide Seiten der Gleichung quadriert: $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ → $2 = \frac{a^2}{b^2}$ → $2b^2 = a^2$

Die Zahl $2b^2$ ist eine gerade Zahl. Dann muss auch $a^2$ und damit auch a eine gerade Zahl sein, also kann die Zahl a in der Form 2x dargestellt werden. Setzt man a = 2x ein, erhält man:

$2b^2 = (2x)^2$ → $2b^2 = 4x^2$ → $b^2 = 2x^2$ → Also ist auch $b^2$ und damit auch b eine gerade Zahl.

Sind a und b aber beide gerade Zahlen, dann könnte man sie mit 2 kürzen, also sind sie nicht teilerfremd. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.